Задачи для 8—10 классов

1. Борис часто проделывает следующую процедуру: он берет некоторое натуральное число, затем выписывает все его циклические сдвиги (числа, получающиеся перемещением блока из нескольких цифр из начала числа в конец), после чего упорядочивает их по возрастанию. Например, для числа 566239, Борис сделал бы такие преобразования (см. рис., слева).

```
                566239      239566                   ......2
                662395      395662                   ......1
566239    =>    623956  =>  566239                   ......2
                239566      623956                   ......1
                395662      662395                   ......1
                956623      956623                   ......8
                                                     ......1
```

   Однажды он проделал эту процедуру, но бумажка промокла, и остался только правый столбец полученной Борисом таблицы (см. рис., справа).

   С какого числа Борис мог начать? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)

2. У каждого из 10 личных шоферов Парри Лейжда есть по одной копии ключа от каждой из 10 его машин.

   Саботеры, присланные Гиллом Бейтсом, хотят погнуть некоторые из этих ключей, так чтобы нельзя было выбрать 5 шоферов, которые могут выбрать 5 машин и открыть их — каждый своим ключом.

   Какое минимальное количество ключей для этого необходимо погнуть?

3. В квадрате 3×3 расставлены цифры от 1 до 9 (каждая — по одному разу). Будем называть *читаемостью* такого квадрата наибольшее натуральное число, которое можно прочитать, передвигаясь по этому квадрату вверх, вниз, вправо или влево и проходя по каждой клетке не более одного раза. Например, у квадрата на рисунке читаемость равна 987532146 (это число можно прочитать в квадрате, а никакое большее — нельзя).

6	8	7
4	9	5
1	2	3

   Расположите цифры от 1 до 9 в квадрате 3×3 так, чтобы читаемость получившегося квадрата была минимальной из возможных.

4. Аня, Ваня и Саня играют в следующую игру: каждый кидает монетку и прилепляет ее к себе на лоб, не подсматривая.

   Таким образом, каждый игрок видит монетки двух других игроков, но не свою. Любая иная передача данных между игроками запрещена.

   Затем каждый из них пишет на бумажке одно из трех слов: «орел», «решка» или «не знаю».

   Если хотя бы один игрок написал «орел»/«решка» и не угадал свою монетку, то ребята проиграли.

   Если все трое написали «не знаю», то они тоже проиграли.

   Во всех остальных случаях — они выиграли.

   Как вы понимаете, возможны восемь комбинаций орлов/решек, выпадающих на трех монетках.

   Придумайте стратегию для ребят, при которой они точно выигрывают хотя бы в пяти из этих восьми комбинаций.

5. На доске 8×8 есть разрешенные и запрещенные клетки, при этом левый верхний и правый нижний углы — разрешенные.

   Шахматный король начинает в левом верхнем углу, после чего ходит только по разрешенным клеткам и делая только ходы вниз, вправо и вправо-вниз.

   Запретите на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы количество различных маршрутов короля из левого верхнего угла в правый нижний равнялось 89.